Théorèmes de Perron-Frobenius et Stein-Rosenberg Booléens

François Robert
Institut National Polytechnique
Laboratoire de Mathématiques Appliquées
Tour des Mathématiques
B.P. 53—38041 Grenoble, France

Submitted by Robert Plemmons

ABSTRACT

On définit et l'on étudie la notion "d'éléments propres" d'une matrice booléenne. Une "forme normale" est établie, qui permet de caractériser les matrices booléennes de rayon spectral (booléen) nul ou égal à 1. On est alors en mesure de démontrer trois résultats: théorème de Perron-Frobénius booléen, théorème "tronqué" de Stein-Rosenberg booléen, théorème de Stein-Rosenberg booléen, qui sont les analogues booléens des théorèmes usuels valables pour les matrices à éléments réels $\geqslant 0$. L'application de ces résultats est développée par ailleurs.

ABSTRACT

The eigenelements of a Boolean matrix are defined. A "normal form" is given, which allows one to characterize those Boolean matrices the (Boolean) spectral radius of which is 0 or 1. Then the following results are proved: a Boolean Perron-Frobenius theorem, a "Truncated" Boolean Stein-Rosenberg theorem, and a Boolean Stein-Rosenberg theorem, which are the exact Boolean analogues of the usual corresponding theorems concerning real nonnegative matrices. Applications of these results are given elsewhere.

1. INTRODUCTION

L'étude des propriétés spectrales des matrices carrées, réelles, à éléments positifs ou nuls, conduit à deux théorèmes de base: le théorème de Perron-Frobenius [3, 4, 8, 13] et celui de Stein-Rosenberg [3, 8, 13].

On sait que ces deux théorèmes servent constamment d'outils dans l'étude de la convergence de procédés itératifs sur $\mathbf{R}^n$, linéaires [3, 13] ou non linéaires [1, 2, 5–9, 11...].

Pour étudier la convergence de procédés itératifs analogues, mais sur des ensembles finis [12] on a été amené à se poser la question de savoir s'il était possible d'élaborer des "versions booléennes" de ces deux théorèmes.

L'objet de ce travail est de montrer comment on peut apporter une réponse affirmative à cette question.

2. NOTATIONS

$E=\{0,1\}$ désignera l'algèbre de Boole usuelle:

$$0+0=0, \qquad 0+1=1+0=1, \qquad 1+1=1,$$

$$0\cdot 0=0, \qquad 0\cdot 1=1\cdot 0=0, \qquad 1\cdot 1=1.$$

$E^k=\{0,1\}^k$ désignera l'ensemble des "vecteurs" booléens à k composantes, ensemble muni de la somme (booléenne) et de la multiplication par un scalaire (booléen).

$\mathcal{M}_k$ désignera l'ensemble des matrices booléennes (k,k) ensemble muni de la somme (booléenne), de la multiplication (booléenne) de deux matrices booléennes et de la multiplication (booléenne) d'une matrice booléenne par un scalaire booléen.

On notera indifféremment par $\leqslant$ la relation d'ordre "composante à composante" sur E^k ou "élément à élément" sur $\mathcal{M}_k$, induite par la relation d'ordre sur E:

$$0\leqslant 0, \qquad 0\leqslant 1, \qquad 1\leqslant 1.$$

Ces relations d'ordre introduites respectivement sur E^k et $\mathcal{M}_k$ ont toutes les propriétés usuelles de compatibilité avec les diverses lois algébriques considérées.

3. ELEMENTS PROPRES D'UNE MATRICE BOOLEENNE

Soit B une matrice booléenne (k,k). Un élément *non nul* u de E^k est dit *vecteur propre* (booléen) de B s'il existe $\lambda\in E=\{0,1\}$ tel que

$$Bu=\lambda u.$$

λ sera alors appelée *valeur propre* (booléenne) attachée au vecteur propre u. Ainsi, si une matrice booléenne admet une valeur propre, celle-ci ne peut être que 0 ou 1.

EXEMPLES.

Toute matrice booléenne diagonale admet évidemment les vecteurs de base pour vecteurs propres, avec les éléments diagonaux correspondants comme valeurs propres.

La matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

admet la valeur propre 1 associée au vecteur propre

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

mais n'admet pas la valeur propre 0.

REMARQUE. Si B admet une valeur propre λ attachée au vecteur propre u, alors, pour toute matrice de permutation P, la matrice booléenne P^tBP admet λ pour valeur propre attachée au vecteur propre $v = P^tu$:

$$Bu = \lambda u \qquad \text{d'où} \qquad P^tBP\,P^tu = \lambda P^tu.$$

B et P^tBP ont donc mêmes valeurs propres $[B = P(P^tBP)P^t]$. Dans ce qui suit, on étudie et l'on caractérise les éléments propres d'une matrice booléenne quelconque.

PROPOSITION 1. *Pour qu'une matrice booléenne B admette* 0 *pour valeur propre, il faut et il suffit qu'elle admette au moins une colonne nulle. Alors tout vecteur propre associé est obtenu comme somme de vecteurs de base correspondants à des colonnes nulles de B.*

Démonstration. Si la $i$ème colonne de B est nulle, il est clair que $Be_i = 0 = 0 \cdot e_i$ donc e_i est vecteur propre de B associé à la valeur propre 0.

Inversement s'il existe $u \neq 0$ tel que $Bu = 0$, il est clair que pour toute composante u_i non nulle (donc $= 1$) de u, la $i$ème colonne de B est nulle.

Si I est un sous-ensemble de $\{1, 2, \ldots, k\}$ pour lequel les colonnes correspondantes de B sont nulles, il est clair que $B\sum_{i \in I} e_i = \sum_{i \in I} Be_i = 0$ donc $u = \sum_{i \in I} e_i$ est vecteur propre de B attaché à la valeur propre 0.

Inversement si $u \neq 0$ est tel que $Bu = 0$, on a $u = \sum_{i \in I} e_i$, où I désigne l'ensemble des indices des composantes non nulles de u, et l'on a vu que pour ces indices les colonnes correspondantes de B sont nulles. ■

Proposition 2. *Soit B une matrice booléenne. Alors:*

(1) *ou bien B n'a aucune ligne nulle.*

(2) *ou bien il existe une matrice de permutation P telle que P^tBP ait la forme suivante:*

$$P^tBP = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \overbrace{\quad}^{r} & \qquad\quad \end{array} \\ \begin{array}{c} r\{ \\ \\ \end{array} & \left[\begin{array}{c|c} T \;\; 0 & 0 \\ \hline u & v \end{array}\right] \end{array}, \qquad 1 \leqslant r < k.$$

T étant triangulaire inférieure stricte et V n'ayant aucune ligne nulle.

(3) *ou bien il existe une matrice de permutation P telle que $P^tBP = T$ soit triangulaire inférieure stricte.*

Démonstration. En effet, ou bien B n'a aucune ligne nulle [point (1)] ou bien elle en a au moins une, qu'on amène en première position par permutation de lignes et des mêmes colonnes (ce qui donne bien une opération de la forme $P_1^tBP_1$)

$$P_1^tBP_1 = \left[\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{0} \\ \hline \; & \qquad\qquad \\ & \\ & \end{array}\right].$$

On peut alors itérer le raisonnement, sur la sous-matrice $(k-1, k-1)$. Finalement—ou bien le procédé s'arrête après r pas $(r<k)$. On a donc alors $P_1, \ldots, P_r$ telles que:

$$P_r^t \cdots P_1^tBP_1 \cdots P_r = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \overbrace{\quad}^{r} & \qquad\quad \end{array} \\ \begin{array}{c} r\{ \\ \\ \end{array} & \left[\begin{array}{c|c} T \;\; 0 & 0 \\ \hline u & v \end{array}\right] \end{array},$$

avec T triangulaire inférieure stricte et V sans aucune ligne nulle: en posant $P = P_1, \ldots, P_r$, on obtient ainsi le point (2)—ou bien le procédé peut être poursuivi jusqu'à $r = k$ et l'on obtient le point (3). Les points (1) et (3) sont évidemment cas limites du point (2). ■

EXEMPLE.

$$B=\begin{array}{c}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{c} {\scriptstyle 1} \\ {\scriptstyle 4} \\ {\scriptstyle 3} \\ \\ \\ {\scriptstyle 2} \end{array}.$$

Sans faire les permutations, on peut:

barrer les lignes nulles de B et les colonnes de même numéro
itérer le procédé.

Il vient:

$$B=\begin{bmatrix} \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{1} & 1 & 1 & \cancel{1} \\ \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{1} & 0 & 1 & \cancel{1} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{bmatrix}.$$

Le procédé s'arrête pour $r=4$. Alors, il est clair que:

$$P=P_1P_2P_3P_4=\underset{P_2}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}\;\underset{P_4}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}.$$

Car

$$P_1=I, \qquad P_3=I.$$

D'où:

$$P=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

d'où

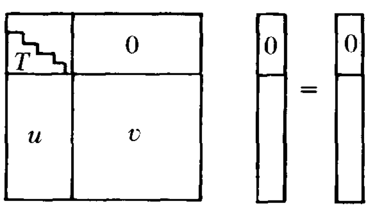
$$P^tBP=\left[\begin{array}{cccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Proposition 3. *Pour qu'une matrice booléenne B admette* 1 *pour valeur propre, il faut et il suffit qu'elle contienne une sous-matrice principale n'ayant aucune ligne nulle.*

Démonstration. Dire que B contient une sous-matrice principale n'ayant aucune ligne nulle, c'est dire que l'on est dans les cas (1) ou (2) de la proposition précédente. Montrons donc que dans les cas (1) et (2) B possède la valeur propre 1 et que dans le cas (3) B ne la possède pas:

Dans le cas (1), le vecteur e dont toutes les composantes valent 1 vérifie évidemment $Be=e$: 1 est valeur propre de B.

Dans le cas (2), on a:



car V n'a aucune ligne nulle: donc 1 est encore valeur propre de B.

Dans le cas (3), soit u tel que $Tu=u$; T étant triangulaire inférieure stricte, il vient, nécessairement:

$$u_1=0 \quad \text{puis} \quad u_2=0 \quad \text{puis} \quad \cdots \quad \text{puis} \quad u_n=0$$

donc $u=0$ ne peut être vecteur propre. ■

RÉMARQUE. Il est possible de caractériser (de façon un peu technique) les vecteurs propres attachés à la valeur propre 1.

PROPOSITION 4. *Toute matrice booléenne admet au moins une valeur propre.*

Un tel résultat n'est pas à priori évident, il nécessite une démonstration, élémentaire d'après les Propositions 1, 2 et 3:

Démonstration. Considérons les cas (1) et (2) de la Proposition 2. Alors d'après la Proposition 3, B admet pour valeur propre 1.

Dans le cas (3) B n'admet pas la valeur propre 1 (toute sous-matrice principale de B admettant au moins une ligne nulle) mais, B ayant alors au moins une colonne nulle, B admet la valeur propre 0 d'après la Proposition 1. ■

EXEMPLES.

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ admet la valeur propre 1, *mais pas la valeur propre* 0.

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ admet la valeur propre 1, mais pas la valeur propre 0.

$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ admet la valeur propre 1, *mais pas la valeur propre* 0.

$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ admet la valeur propre 1 et la valeur propre 0.

$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ admet la valeur propre 0 mais pas la valeur propre 1.

DÉFINITION. $\rho(B)$ désignera la plus grande valeur propre booléenne d'une matrice booléenne B [$\rho(B)=0$ ou 1] et sera appelé le *rayon spectral* (*booléen*) de B.

PROPOSITION 5. *Soit B une matrice booléenne (k,k). Pour que $\rho(B)=0$, il faut et il suffit que l'une des deux conditions équivalentes suivantes soit vérifiée:*

(a) *il existe une matrice de permutation P telle que P^tBP soit triangulaire inférieure stricte,*
(b) $B^k=0$.

Démonstration. Le point (a) est évident d'après la Proposition précédente: C'est le cas (3) de la Proposition 2. Etablissons le point (b): En effet, si $\rho(B)=0$, il existe donc une matrice de permutation P telle que P^tBP soit triangulaire inférieure stricte. D'où

$$(P^tBP)^k=0.$$

Soit

$$P^tB^kP=0,$$

d'où

$$B^k=0.$$

Inverserment, si $\rho(B)\neq 0$, B admet la valeur propre 1: il existe u non nul tel que $Bu=u$ d'où $B^ku=u$ d'où $\rho(B^k)=1$ donc $B^k\neq 0$. ∎

RÉMARQUES.

(1) *Le résultat de la Proposition* 5 ci-dessus est formellement le même que pour des matrices à éléments réels positifs ou nuls [8].

(2) Il est clair que dans les cas (2) et (3) de la Proposition 2, B est réductible. Donc si une matrice booléenne B est irréductible, elle vérifie le cas (1) donc en particulier $\rho(B)=1$, et le vecteur e dont toutes les composantes sont égales à 1 est vecteur propre de B attaché à la valeur propre 1. Inversement, une matrice booléenne B peut vérifier le cas (1) et être réductible:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

et admette également la valeur propre 0:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(3) Enfin, pour qu'une matrice booléenne B soit de rayon spectral booléen $\rho(B)$ égal à 1, il faut et il suffit que les points (a) et (b) de la proposition précédente ne soient pas satisfaits, ou encore, d'après la Proposition 3 que B contienne une sous-matrice principale n'ayant aucune ligne nulle: c'est le cas (1) ou (2) de la Proposition 2.

4. THEOREME DE PERRON-FROBENIUS BOOLEEN

THÉORÈME. *Soit B une matrice booléenne (k,k). Alors:*

(1) *Son rayon spectral booléen $\rho(B)$ est valeur propre, à laquelle est attaché un vecteur propre $u \geqslant 0$.*

(2) *Si $B \leqslant C$ alors $\rho(B) \leqslant \rho(C)$.*

(3) *Pour toute partie M non vide de $\{1,2,\ldots,k\}$ on a:*

$$\max_{M} \min_{i \in M} \sum_{j \in M} b_{ij} = \rho(B) \leqslant \max_{i=1,2,\ldots,k} \sum_{j=1}^{k} b_{ij}.$$

(L'inégalité n'étant en général pas une égalité.)

(4) *Si B est irréductible, alors $\rho(B)=1$, correspondant (au moins) au vecteur propre e (toutes composantes $=1$) et l'on a alors l'égalité:*

$$\rho(B) = \max_{i=1,2,\ldots,k} \sum_{j=1}^{k} b_{ij} = 1.$$

(5) *Pour tout $\lambda \in \{0,1\}$ tel que $Be \leqslant \lambda e$ alors $\rho(B) \leqslant \lambda$.*

(6) *Soit $u \neq 0$. Alors pour tout λ tel que $\lambda u \leqslant Bu$, on a: $\lambda \leqslant \rho(B)$.*

RÉMARQUE. On notera l'analogie de ce résultat avec le théorème de Perron-Frobenius [4, 8, 13] valable dans le cas de matrices à éléments *réels* $\geqslant 0$. Les démonstrations diffèrent (et sont beaucoup plus simples dans le contexte booléen).

Démonstration.

Le point (1), trivial d'après ce qui précède, n'est rappelé que par analogie avec le théorème classique.

Le point (2): Soit C, matrice booléenne, telle que $B \leqslant C$. Si $\rho(B)=1$ alors B admet une sous-matrice principale n'ayant aucune ligne nulle, donc C de même et $\rho(C)=1$. Si $\rho(B)=0$ alors $0 \leqslant \rho(C)$.

Le point (3):

(a) $\max_i \sum_j b_{ij}$ n'est nul que pour $B=0$ d'où $\rho(B)=0$. L'inégalité

$$\rho(B) \leqslant \max_{i=1,2,\ldots,k} \sum_{j=1}^{k} b_{ij}$$

est donc établie (l'exemple suivant:

$$B=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{avec} \quad B \neq 0 \text{ et } \rho(B)=0$$

montre que l'inégalité en question n'est pas en général une égalité).
(b) Soit M une partie non vide de $\{1,2,\ldots,k\}$. Alors, dire que $\min_{i\in M}\sum_{j\in M} b_{ij}=1$, c'est dire que la sous-matrice principale de B définie par M n'a aucune ligne nulle.

Donc

Si

$$\max_M \min_{i\in M} \sum_{j\in M} b_{ij}=1,$$

cela signifie que B admet une sous-matrice principale sans aucune ligne nulle. Alors (Proposition 3) 1 est valeur propre de B et $\rho(B)=1$.
Si

$$\max_M \min_{i\in M} \sum_{j\in M} b_{ij}=0,$$

cela signifie au contraire que dans toute sous-matrice principale de B, il existe une ligne nulle. Alors (Proposition 3) 1 ne peut être valeur propre de B, donc (Proposition 4) 0 est la seule valeur propre de B et $\rho(B)=0$.

RÉMARQUE. Pour la matrice

$$B=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

on a

$$\rho(B)=1 \quad \text{et} \quad \min_M \max_{i\in M} \sum_{j\in M} b_{ij}=0.$$

Les points (4) *et* (5): Complètement triviaux d'après ce qui précède, ne sont cités que par analogie avec le théorème de Perron-Frobenius classique dans la version donnée dans [8].

Le point (6): Trivial pour $\lambda = 0$. Pour $\lambda = 1$: Soit $u \neq 0$, $Bu \geqslant u$; alors, à une permutation de lignes et colonnes près, on a la situation suivante:

$$\begin{array}{|c|c|}\hline B_1 & B_2 \\ \hline B_3 & B_4 \\ \\ \hline\end{array} \; \begin{array}{|c|}\hline 0 \\ \hline 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \hline\end{array} = \begin{array}{|c|}\hline B_2 \\ \hline B_4 \\ \\ \hline\end{array} \; \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \hline\end{array} \geqslant \begin{array}{|c|}\hline 0 \\ \hline 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \hline\end{array}$$

donc

$$B_4 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \geqslant \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{d'où} \quad B_4 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

ce qui montre que, B_4 n'ayant aucune ligne identiquement nulle, B admettant B_4 pour sous-matrice principale, on a $\rho(B) = 1$. ■

5. THEOREMES DE STEIN-ROSENBERG BOOLEENS

THÉORÈME DE STEIN-ROSENBERG "TRONQUÉ". *Soient L et U deux matrices booléennes (k,k). Si l'on pose:*

$$S_r = [I + L + \cdots + L^r]U + L^{r+1} \qquad (r = 0,1,2,\ldots)$$

alors toutes les matrices S_r ont même rayon spectral booléen.

Démonstration. A partir de $S_0 = L + U$ les matrices S_r se définissent par récurrence:

$$S_{r+1} = LS_r + U \qquad (r = 0,1,2,\ldots).$$

Supposons exister $u \neq 0$ tel que $S_0 u = u$ $[\rho(S_0) = 1]$ et montrons par récurrence que $S_r u = u$. En effet, si $S_r u = u$ alors:

$$S_{r+1}u = LS_r u + Uu = Lu + Uu = S_0 u = u$$

d'où $\rho(S_r) = 1$ pour tout r.

Supposons au contraire que $\rho(S_0) = 0$. Alors (Proposition 5) il existe une matrice de permutation P telle que la matrice $\bar{S}_0 = P^t S_0 P$ soit triangulaire inférieure stricte. Or $S_0 = L + U$ donc

$$\bar{S}_0 = P^t S_0 P = P^t LP + P^t UP$$

avec

$\bar{L} = P^t L P \leqslant \bar{S}_0$ donc $\bar{L}$ triangulaire inférieure stricte,
$\bar{U} = P^t U P \leqslant \bar{S}_0$ donc $\bar{U}$ triangulaire inférieure stricte.

Alors puisque

$$S_r = (I + L + \cdots + L^r)U + L^{r+1}$$

il est facile de voir que la matrice $\bar{S}_r = P^t S_r P$ s'exprime en

$$\bar{S}_r = (I + \bar{L} + \cdots + \bar{L}^r)\bar{U} + \bar{L}^{r+1}$$

d'où résulte que $\bar{S}_r$ est *triangulaire inférieure stricte*[1] donc $\rho(\bar{S}_r) = 0$ et par conséquent:

$$\rho(S_r) = 0 \qquad \left(\text{puisque} \quad S_r = P\bar{S}_r P^t\right). \qquad \blacksquare$$

REMARQUES. Lorsque $\rho(S_0) = 0$, on a évidemment $0 \leqslant \rho(L) \leqslant \rho(S_0) = 0$ donc $\rho(L) = 0$ (d'ailleurs $\bar{L} = P^t L P$ est triangulaire inférieure stricte). Donc $L^k = 0$, de sorte que à partir de $r = k-1$, S_r est stabilisé sur la matrice $[I + L + \cdots + L^{k-1}]U$ qui est donc de rayon spectral nul.

Lorsque $\rho(S_0) = 1$, mais que $\rho(L) = 0$, on a encore $L^k = 0$, de sorte que là encore, à partir de $r = k-1$, S est stabilisé sur la matrice $[I + L + \cdots + L^{k-1}]U$ qui est donc de rayon spectral égal à 1.

D'où le:

THÉORÈME DE STEIN-ROSENBERG BOOLÉEN. *Soient L et U deux matrices booléennes (k,k). Si $\rho(L+U) = 0$ alors $\rho[(I + L + \cdots + L^{k-1})U] = 0$. Si $\rho(L + U) = 1$, $\rho(L) = 0$ alors $\rho[(I + L + \cdots + L^{k-1})U] = 1$.*

REMARQUE. Dans le deuxième cas, la condition $\rho(L) = 0$ ne peut être enlevée; car pour L telle que $\rho(L) = 1$ et pour U nul, il est clair que:

$$\rho\left[(I + L + \cdots + L^{k-1})U\right] = \rho(0) = 0$$

$$\text{avec néanmoins} \quad \rho(L + U) = \rho(L) = 1.$$

---

[1] $I + \bar{L} + \cdots + \bar{L}^r$ est triangulaire inférieure à diagonale unité, mais son produit par $\bar{U}$, triangulaire inférieure stricte, redonne une triangulaire inférieure stricte à laquelle s'ajoute $\bar{L}^{r+1}$, triangulaire stricte, pour former $\bar{S}_r$.

On notera l'analogie de ces résultats avec le théorème de Stein-Rosenberg classique [3, 8, 13] et le théorème de Stein-Rosenberg "tronqué" [8, 10] valables pour des matrices carrées à éléments *réels* $\geqslant 0$. Voir aussi [14].

6. CONCLUSION

Ainsi, les théorèmes de Perron-Frobenius et Stein-Rosenberg passent parfaitement dans le contexte de matrices booléennes, avec d'ailleurs des démonstrations très simplifiées. C'est en fait pour l'étude de la convergence d'algorithmes itératifs sur des ensembles finis que nous avons été amenés à étudier cette extension: on trouvera dans [12] le développement de cette application, que nous résumons brièvement pour terminer: si X est le produit cartésien de k ensembles *finis*, et si F est une application de X dans X, on s'intéresse à l'évolution de la méthode des approximations successives sur F, et à la méthode de Gauss-Seidel associée. On prouve dans [12] que si la matrice (booléenne) d'incidence de F est de rayon spectral (booléen) inférieur à 1 (donc nul), F admet un point fixe unique, atteint au bout d'un nombre fini de pas par chacune des deux méthodes considérées, quel que soit le point de départ: il y a en effet alors contraction de l'opérateur F relativement à une certaine distance vectorielle sur X. Ces résultats s'interprêtent dans le contexte d'automates cellulaires à nombre fini de cellules: la méthode des approximations successives correspond au fonctionnement (usuel) "en parallèle" de l'automate, celle de Gauss-Seidel au fonctionnement "série". Ces itérations produisent ainsi, sous les hypothèses prises, une *configuration stable* (point fixe de F) en un nombre fini de pas.

Je remercie R. J. Plemmons pour ses commentaires et suggestions, en particulier pour la question de savoir si les résultats présentés ici s'étendent à des matrices à éléments pris dans une algèbre de Boole générale.

Nous laisserons cette question ouverte.

REFERENCES

1 M. Chambat, Thèse troisième cycle, Lyon, 1972.
2 M. Charnay, Thèse troisième cycle, Lyon, 1975.
3 N. Gastinel, *Analyse Numérique Linéaire*, Hermann, 1966.
4 F. Gantmacher, *Théorie des Matrices*, Dunod, 1966.
5 N. X. Luong, Thèse troisième cycle, Besançon, 1975.
6 J. C. Miellou, Algorithmes de relaxation chaotique à retards, *R.A.I.R.O.* **R1** (1975), 55–82.
7 J. Ortega et W. C. Rheinboldt, *Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables*, Academic, 1970.

8 F. Robert, *Cours de DEA*, Grenoble, 1973.
9 F. Robert, Contraction en norme vectorielle, *Linear Algebra Appl.* **13** (1976), 19–35.
10 F. Robert, Algorithmes tronqués de découpe linéaire, *R.A.I.R.O.* **R2** (Juillet 1972), pp. 45–64.
11 F. Robert, M. Charnay et F. Musy, Itérations chaotiques série parallèle pour des équations non linéaires de point fixe, *Apl. Mat. Čech. Akad. Ved. (Prague)* **20** (1975), 1–38.
12 F. Robert, Itérations sur des ensembles finis et convergence d'automates cellulaires contractants, Rapport de Recherche No. 2, Mathématiques Appliquées et Informatique, Grenoble, 1975.
13 R. S. Varga, *Matrix Iterative Analysis*, Prentice-Hall, 1962.
14 F. Robert, Autour du théorème de Stein-Rosenberg, *Numer. Math.* **27** (1976), 133–141.

Received 9 July 1976; revised 8 October 1976